第 2 节 基本不等式的核心运用思想（★★★☆）

强化训练

1．（2023・重庆模拟・★★★）已知 $x>0$，$y>0$，$xy+x-2y=4$，则 $2x+y$ 的最小值是（　　）

（A）4　（B）5　（C）7　（D）9

答案： C

解析： 要求和的最小值，应凑“积定”，直接凑不易，可先由所给等式反解出 x，代入消元再看，

$xy+x-2y=4\Rightarrow x(y+1)=2y+4\Rightarrow x=\dfrac{2y+4}{y+1}$ ①，

代入 $2x+y$ 可得 $2x+y=2\cdot\dfrac{2y+4}{y+1}+y=2\cdot\dfrac{2(y+1)+2}{y+1}+y=2(2+\dfrac{2}{y+1})+y=\dfrac{4}{y+1}+y+4$

$=\dfrac{4}{y+1}+(y+1)+3\ge 2\sqrt{\dfrac{4}{y+1}\cdot(y+1)}+3=7$，

取等条件是 $\dfrac{4}{y+1}=y+1$，结合 $y>0$ 解得：$y=1$，代入①得 $x=3$，所以 $2x+y$ 的最小值是 7.

2．（2020・江苏卷・★★★）已知 $5x^2y^2+y^4=1(x,y\in\mathbf{R})$，则 x^2+y^2 的最小值为_____.

答案： $\dfrac{4}{5}$

解析： 由所给等式容易反解出 x^2，可代入 x^2+y^2 消元再分析最值，

因为 $5x^2y^2+y^4=1$，所以 $x^2=\dfrac{1-y^4}{5y^2}$，故 $x^2+y^2=\dfrac{1-y^4}{5y^2}+y^2=\dfrac{1}{5y^2}-\dfrac{y^2}{5}+y^2=\dfrac{1}{5y^2}+\dfrac{4y^2}{5}\ge 2\sqrt{\dfrac{1}{5y^2}\cdot\dfrac{4y^2}{5}}=\dfrac{4}{5}$，

当且仅当 $\dfrac{1}{5y^2}=\dfrac{4y^2}{5}$ 时取等号，解得：$y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，此时 $x=\pm\dfrac{\sqrt{30}}{10}$，所以 x^2+y^2 的最小值为 $\dfrac{4}{5}$.

3．（★★★）已知 $x>0$，$y>0$，且 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=1$，则 $\dfrac{x^2}{x-1}+\dfrac{y}{y-4}$ 的最小值为_____.

答案： $2\sqrt{2}+3$

解析： 目标式较复杂，不易直接看出如何凑定值，可考虑结合所给等式消元，目标式中 y 的部分更简单，故消 y，

因为 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=1$，所以 $y=\dfrac{4x}{x-1}$，又 $x>0$，$y>0$，所以 $x>1$，

将 $y=\dfrac{4x}{x-1}$ 代入目标式可得 $\dfrac{x^2}{x-1}+\dfrac{y}{y-4}=\dfrac{x^2}{x-1}+\dfrac{\frac{4x}{x-1}}{\frac{4x}{x-1}-4}=\dfrac{x^2}{x-1}+x$，

若不知道接下来如何凑定值，可将分母换元再看，设 $t=x-1$，则 $x=t+1$，因为 $x>1$，所以 $t>0$，

$$\frac{x^2}{x-1}+\frac{y}{y-4}=\frac{x^2}{x-1}+x=\frac{(t+1)^2}{t}+t+1=\frac{t^2+2t+1}{t}+t+1=t+2+\frac{1}{t}+t+1=2t+\frac{1}{t}+3\ge 2\sqrt{2t\cdot\frac{1}{t}}+3=2\sqrt{2}+3,$$

当且仅当 $2t=\frac{1}{t}$ 时取等号，此时 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$，满足题意，所以 $\frac{x^2}{x-1}+\frac{y}{y-4}$ 的最小值为 $2\sqrt{2}+3$.

4.（★★★）若 $a>0$，$b>0$，且 $ab=2a+b+16$，则 ab 的最小值为_____.

答案：32

解析：本题可以消元，但若发现条件中已有求最值的目标 ab，故把剩下的 $2a+b$ 也化为 ab，就能统一结构，

由题意，$ab=2a+b+16\ge 2\sqrt{2ab}+16$，所以 $ab-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{ab}-16\ge 0$，故 $(\sqrt{ab}+2\sqrt{2})(\sqrt{ab}-4\sqrt{2})\ge 0$，

解得：$\sqrt{ab}\ge 4\sqrt{2}$，所以 $ab\ge 32$，当且仅当 $2a=b$ 时取等号，

代入 $ab=2a+b+16$ 可求得 $\begin{cases}a=4\\b=8\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2\\b=-4\end{cases}$（舍去），所以 ab 的最小值为 32.

5.（★★）若 $x>0$，$y>0$，且 $x+2y=1$，则 $\frac{xy}{2x+y}$ 的最大值为_____.

答案：$\frac{1}{9}$

解析：所给分式的分子分母不齐次，可尝试通过“1”的代换将它们齐次化，

由题意，

$$\frac{xy}{2x+y}=\frac{xy}{(2x+y)\cdot 1}=\frac{xy}{(2x+y)(x+2y)}=\frac{xy}{2x^2+5xy+2y^2}=\frac{1}{\frac{2x}{y}+5+\frac{2y}{x}}=\frac{1}{\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}+5}\le\frac{1}{2\sqrt{\frac{2x}{y}\cdot\frac{2y}{x}}+5}=\frac{1}{9},$$

当且仅当 $\frac{2x}{y}=\frac{2y}{x}$ 时取等号，结合 $x+2y=1$ 可得此时 $x=y=\frac{1}{3}$，所以 $\frac{xy}{2x+y}$ 的最大值为 $\frac{1}{9}$.

【反思】本题若将 $\frac{xy}{2x+y}$ 上下同除以 xy，就化为 $\frac{1}{\frac{2}{y}+\frac{1}{x}}$，故只需求分母的最小值，这就是“1”的代换题型了；甚至本题也能消元做，只是系数稍麻烦.

6.（2023·武汉模拟·★★★）已知 $x>0$，$y>0$，且 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1$，则 $2x+y+\frac{2y}{x}$ 的最小值为_____.

答案：$4\sqrt{2}+5$

解法 1：不易看出该怎么凑“积定”，可考虑由所给等式反解出 y，代入消元再凑，

$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1\Rightarrow y=\frac{x}{x-2}$，由 $x>0$ 和 $y=\frac{x}{x-2}>0$ 得 $x>2$，

所以 $2x+y+\frac{2y}{x}=2x+\frac{x}{x-2}+\frac{2}{x}\cdot\frac{x}{x-2}=2x+\frac{x+2}{x-2}$

$=2x+\frac{(x-2)+4}{x-2}=2x+\frac{4}{x-2}+1=2(x-2)+\frac{4}{x-2}+5$

$\ge 2\sqrt{2(x-2)\cdot\frac{4}{x-2}}+5=4\sqrt{2}+5$，

取等条件是 $2(x-2)=\frac{4}{x-2}$，结合 $x>2$ 解得：$x=2+\sqrt{2}$，所以 $2x+y+\frac{2y}{x}$ 的最小值为 $4\sqrt{2}+5$.

解法 2：目标式中有一次齐次分式 $\frac{2y}{x}$，考虑将前面的 $2x+y$ 也化为一次齐次分式，可用“1”的代换来实现，

由题意，$2x+y+\frac{2y}{x}=(2x+y)\cdot 1+\frac{2y}{x}=(2x+y)(\frac{2}{x}+\frac{1}{y})+\frac{2y}{x}=4+\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}+1+\frac{2y}{x}$

$=\frac{2x}{y}+\frac{4y}{x}+5\ge 2\sqrt{\frac{2x}{y}\cdot\frac{4y}{x}}+5=4\sqrt{2}+5$，

当且仅当 $\frac{2x}{y}=\frac{4y}{x}$ 时取等号，结合 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1$ 可得此时 $x=2+\sqrt{2}$，$y=1+\sqrt{2}$，所以 $(2x+y+\frac{2y}{x})_{\min}=4\sqrt{2}+5$.

7.（2021·天津卷·★★★）已知 $a>0$，$b>0$，则 $\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b$ 的最小值为_____.

答案：$2\sqrt{2}$

解析：a，b 之间没有等式，故直接分析目标式，观察发现 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{a}{b^2}$ 相乘可约去 a，故先对这两项用均值不等式，

由题意，$\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b\ge 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{b^2}}+b=\frac{2}{b}+b$，此式仍满足积为定值，故再用均值不等式，

又 $\frac{2}{b}+b\ge 2\sqrt{\frac{2}{b}\cdot b}=2\sqrt{2}$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b\ge 2\sqrt{2}$，

取等条件分别是 $\frac{1}{a}=\frac{a}{b^2}$ 和 $\frac{2}{b}=b$，解得：$\begin{cases}a=\sqrt{2}\\ b=\sqrt{2}\end{cases}$，故 $(\frac{1}{a}+\frac{a}{b^2}+b)_{\min}=2\sqrt{2}$.

8.（★★★）已知 a，b，c 均为正数，且 $abc=4(a+b)$，则 $a+b+c$ 的最小值为_____.

答案：8

解法 1：由所给等式容易反解出 c，可尝试将其反解出来，并代入 $a+b+c$ 中消去 c，

因为 $abc=4(a+b)$，所以 $c=\frac{4(a+b)}{ab}$，故 $a+b+c=a+b+\frac{4(a+b)}{ab}$ ①，

求和的最小值的关键是凑积为定值，观察发现只要把分式拆开，就能凑出积定，

由①可得 $a+b+c=a+\frac{4}{a}+b+\frac{4}{b}\ge 2\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}}+2\sqrt{b\cdot\frac{4}{b}}=8$，

取等条件是 $a=\frac{4}{a}$ 且 $b=\frac{4}{b}$，此时 $a=b=2$，故 $a+b+c$ 的最小值为 8.

解法 2：得到上述式①的过程同解法 1，式①中有 $a+b$ 和 ab，可先用 $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ 把结构统一为 ab 再来看，

$a+b+c=a+b+\frac{4(a+b)}{ab}\ge 2\sqrt{ab}+\frac{4\times 2\sqrt{ab}}{ab}=2\sqrt{ab}+\frac{8}{\sqrt{ab}}\ge 2\sqrt{2\sqrt{ab}\cdot\frac{8}{\sqrt{ab}}}=8$，

上述两个不等号的取等条件分别是 $a=b$ 和 $2\sqrt{ab}=\frac{8}{\sqrt{ab}}$，解得：$a=b=2$，所以 $a+b+c$ 的最小值为 8.

9.（2022·全国联考·★★★★）若实数 x，y 满足 $4^x+4^y=2(2^x+2^y)$，则 $2^{x-1}+2^{y-1}$ 的值可以是（　　）

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）1　　（C）$\frac{3}{2}$　　（D）3

答案：C

解析：已知与求最值的式子都为指数式，处理起来不方便，可先换元，

设 $a=2^x$，$b=2^y$，则 $a>0$，$b>0$，$4^x+4^y=2(2^x+2^y)$ 即为 $a^2+b^2=2(a+b)$，且 $2^{x-1}+2^{y-1}=\frac{1}{2}(a+b)$ ①，

等式 $a^2+b^2=2(a+b)$ 中已有求最值的结构 $a+b$，可把其余部分也化为 $a+b$，从而统一结构，

一方面，$2(a+b)=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab\ge(a+b)^2-2(\frac{a+b}{2})^2=\frac{(a+b)^2}{2}$，所以 $a+b\le4$，取等条件是 $a=b=2$，

另一方面，$2(a+b)=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab<(a+b)^2$，所以 $a+b>2$，故 $2<a+b\le4$，

结合式①可得 $1<2^{x-1}+2^{y-1}\le2$，故选 C.

【反思】上述解析中得出的 $2<a+b\le4$，其中右半边由不等式 $ab\le(\frac{a+b}{2})^2$ 得出，较容易想到，而左半边是根据 $ab>0$ 得到的，它用的是 a，b 均为正数这一不起眼的条件，较难想到，所以我们在分析 ab 取值范围时，除了考虑常用的不等式之外，还需注意 a，b 本身满足的条件.